УДК 004.2

PRINCIPLES OF OPTIMALITY OF DISTRIBUTION OF WINNING IN THE PROBLEMS OF THE THEORY OF COOPERATIVE GAMES

ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫИГРЫША В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

Kozlov A.D. / Козлов А.Д.
student / студент
Sorokin V.A. / Сорокин В.А.
student / студент
Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Universitetskaya naberezhnaya 7–9, 199034
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Университетская набережная 7–9, 199034

Аннотация. *В этой статье мы рассматриваем различные принципы оптимальности распределения выигрыша между игроками в задачах теории кооперативных игр. Вектор Шепли и вектор Майерса, который тесно связан с предыдущим, но определен для несколько другого класса игр.*

Ключевые слова: *Теория игр, кооперация, оптимизация, вектор Шепли, вектор Маерсона.*

Вступление.

Вектор Шепли является одной из основных концепций решения теории кооперативных игр.

Ситуация в которой любое подмножество множества игроков может сформировать коалицию и сотрудничать, получая определенные выплаты может быть описана кооперативной игрой с трансферабельной полезностью (TU - игрой). Однако существует много реальных ситуаций для которых требуется модель, принимающая во внимание ограничения в сотрудничестве. В этой статье мы рассматриваем TU игру с ограниченной кооперацией представленной ненаправленным коммуникационным графом, введенную Майерсоном. Вершины графа представляют игроков, а ребра представляют связи между игроками. Игроки могут взаимодействовать напрямую только если они связаны.

Кооперативная игра и вектор Шепли.

Кооперативная игра это игра нескольких лиц, у каждого из которых есть конечное множество стратегий и одна общая цель, как правило это всем вместе заработать как можно больше.

Итак, пусть N - непустое конечное множество игроков, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Любое объединение игроков (непустое подмножество $S \subset N$) называется *коалицией*.

Характеристической функцией называется такая функция $v(S)$, если для любых непересекающихся коалиций T, S $(T \subset N, S \subset N)$ выполняется:

$$v(T) + v(S) \leq v(T \cup S), \qquad v(\varnothing) = 0.$$

Характеристическая функция ставит в соответствие каждой коалиции суммарный выигрыш, который получат участники данной коалиции.

Таким образом пара (N, v) есть кооперативная игра в форме характеристической функции.

Характеристическая функция *супераддитивна*, поэтому игроки заинтересованы в образовании наибольшей коалиции N. Следовательно основной задачей кооперативной теории игр n лиц заключается в построении оптимального распределения максимального суммарного выигрыша $v(N)$ между игроками.

Дележом максимального выигрыша называется такой вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющий:

$$\alpha_i \geq v(\{i\}), \quad i \in N$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(N),$$

где α_i - сумма, которую получит игрок i.

Во всякой существенной игре (игра называется существенной, если для этой игры $\sum_{i \in N} v(\{i\}) < v(N)$) с более чем одним игроком множество дележей бесконечно. Но какой из них лучший? Ответ на вопрос как же найти оптимальный делёж дает вектор Шепли.

Определим вектор Шепли аксиоматически.

Носителем игры (N, v) называется такая коалиция T, что $v(S) = v(S \cap T)$ для любой коалиции $S \in N$.

Следовательно определение утверждает, что любой игрок, не принадлежащий носителю игры, является “болваном”, т.е. не может ничего внести ни в какую коалицию.

Рассмотрим произвольную перестановку P упорядоченного множества игроков $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

С этой перестановкой связана подстановка π, т.е. такая взаимно однозначная функция $\pi : N \to N$, что для $i \in N$ представляет собой элемент из N, в который переходит $i \in N$ в перестановке P.

Тогда через $(N, \pi v)$ обозначается такая игра (N, u), что для любой коалиции $S \subset N, S = \{1, 2, \dots, i_S\}$

$$u(\{\pi(i_1), \pi(i_2), \dots, \pi(i_n)\}) = v(S).$$

По существу игра $(N, \pi v)$ отличается от игры (N, v) лишь тема, что в последней игроки поменялись ролями в соответствии с перестановкой P.

Поставим в соответствие каждой корпоративной игре вектор $\varphi = (\varphi_1[v], \dots, \varphi_n[v])$, компоненты которого будем интерпретировать как выигрыши, полученные игроками в результате соглашения. При этом будем считать, что указанное соответствие удовлетворяет следующим аксиомам:

1. *Если S - любой носитель игры (N, v), то*

$$\sum_{i \in S} \varphi_i[v] = v(S).$$

2. *Для любой подстановки π и $i \in N$*

$$\varphi_{\pi(i)}[\pi v] = \varphi_i[v].$$

3. *Если (N, u) и (N, v) --- две любые кооперативные игры, то*

$$\varphi_i [u + v] = \varphi_i [v] + \varphi_i [u].$$

Определение. *Пусть* φ *- функция, ставящая в соответствие согласно аксиомам 1 - 2 каждой игре* (N, v) *вектор* $\varphi [v]$. *Тогда* $\varphi [v]$ *называется вектором Шепли игры* (N, v).

Вектор Шепли определяется единственным образом.

Формула, определяющая компоненты вектора в явном виде:

$$\varphi_i [v] = \sum_{T | i \in T \subset N} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} [v(T) - v(T \setminus \{i\})]$$

Таким образом вектор Шепли определяется средним вкладом игрока в максимальную коалицию и является принципом оптимальности для кооперативных игр.

Кооперативная игра с графом связей и вектор Маерсона.

До этого мы рассматривали игру в которой все игроки кооперируют друг с другом, каждый с каждым. Однако между универсальным сотрудничеством и отсутствием сотрудничества существует много промежуточных вариаций. Теперь же попробуем использовать идеи из теории графов чтобы изучить вопрос о том, как результат игры должен зависеть от того какие игроки взаимодействуют друг с другом.

Пусть N как и раньше непустое конечное множество игроков. *Графом* на N является множество ненаправленных пар различных членов множества N. Эти пары называются *связями*, и обозначаются $n : m$ ($n : m = m : n$, так как связи ненаправленны). Пусть g^N - полный граф:

$$g^N = \{n : m \mid n \in N, m \in N, n \neq m\}.$$

Обозначим множество всех графов на N как GR.

Основная идея состоит в том, что игроки могут кооперироваться друг с другом, образуя взаимные соглашения. Эти соглашения могут быть интерпретированы как связи между игроками, и любая структура сотрудничества может быть представлена как набор таких связей.

Следовательно можно определить множество всех *возможных структур сотрудничества* как GR, множество всех *графов* на множестве игроков.

Предположим, $S \subseteq N, g \in GR, n \in S$, *и* $m \in S$. Тогда можно сказать, что n и m *связаны в S через g* если есть путь в g, который идет из n в m и находится в S.

Если $g \in GR$ и $S \subseteq N$, то получим разбиение S которое объединяет игроков, если они связаны в S через g. Обозначим это разбиение как S_g, то есть

$$S_g = \{\{i \mid i \text{ и } j \text{ связаны в } S \text{ через } g\} \mid j \in S\}.$$

Можно сказать, что S_g это набор маленьких коалиций, на которые распадается S, если игроки взаимодействуют только по связям, образованным графом g. Однако, если два игрока не имеют связи друг с другом, они могут состоять в одной коалиции, если между ними есть путь в графе коопераций.

Пусть v - игра в форме характеристической функции. Каждой коалиции S соответствует некоторое число $v(S)$.

Пусть также GR - множество всех структур сотрудничества в игре v, а исходы могут быть представлены в виде вектора распределения выигрыша.

Определим v_g как характеристическую функцию зависящую от графа g:

$$\forall S \subset N,\ v_g(S) = \sum_{T \in Sg} v(T).$$

Исход v может зависеть от структуры сотрудничества функцией $Y: GR \rightarrow R^N$ составляющей графу кооперации вектор распределения $Y_n(g) = (Y_n(g), \ldots, Y_n(g))$. Таким образом Y_n(g) - выигрыш, который получит игрок n если g является структурой соглашения между игроками. При этом считать, что данное соответствие удовлетворяет следующим аксиомам:

4. $\forall g \in GR,\ \forall S \in N_G$

$$\sum_{n \in S} Y_n(g) = v(S).$$

5. $\forall g \in GR,\ \forall n : m \in g,\ g \setminus n : m = \{i : j \mid i : j \in g,\ i : j\ 6= n : m\}$

$$Y_n(g) \leq Y_n(g \setminus n : m) \quad и \quad Y_m(g) \leq Y_m(g \setminus n : m).$$

6. $\forall g \in GR,\ \forall n : m \in g$

$$Y_n(g) - Y_n(g \setminus n : m) = Y_m(g) - Y_m(g \setminus n : m).$$

Определение. Пусть φ *- функция, ставящая в соответствие согласно аксиомам 4 - 6 каждому графу кооперации* g *вектор* $Y(g)$. *Тогда* $Y(g)$ *называется вектором Маерсона игры* $(S_g,\ v_g)$.

$$Y(g) = \varphi(v_g). \quad \forall g \in GR.$$

Как видно вектор Маерсона тесно связан с понятием вектора Шепли, но определён для несколько другого класса игр.

Пример.

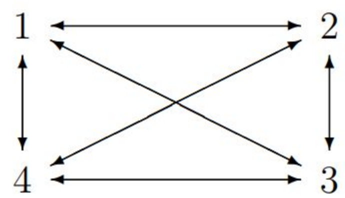
Пусть $N = \{1, 2, 3, 4\}$, характеристическая функция определена как:

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0,$$

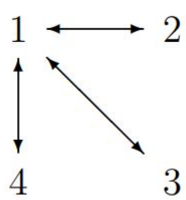
$$v(1, 2) = v(1, 3) = v(1, 4) = v(2, 3) = v(2, 4) = v(3, 4) = 10,$$

$$v(1, 2, 3) = v(1, 2, 4) = v(1, 3, 4) = v(2, 3, 4) = 30,\ v(N) = 100.$$

И пусть есть два графа g_1 и g_2



g_1.



g_2.

Первый граф представляет собой коалицию каждого с каждым. Поэтому и вектор Маерсона этого графа равен вектору Шепли для игры (N, v) :

$$Y(g) = \varphi(N) = (25; 25; 25; 25).$$

Второй же гарф интересней. Особенность в том, что 2, 3 и 4 игроки не могут кооперироваться друг с другом, все коалиции в этой игре проходят через первого игрока. Следовательно у первого игрока наибольший вклад и наибольшая доля:

$$Y(g) = (35; 21,(6); 21,(6); 21,(6)).$$

Выводы.

Мы рассмотрели определение вектора Маерсона, которое очень тесно связано с определением вектора Шепли. Однако в отличается тем, что его можно распространить на более широкий класс игр, так называемых игр с ограниченной кооперацией. Модель игры можно представить как ненаправленный граф, где вершины это игроки, а ребра это связи между игроками. Соответственно игроки могут взаимодействовать, только если между ними существует эта самая связь.

Понятие "связи" при этом может интерпретироваться весьма широко : ее наличие может о означать передачу информации или ресурсов между игроками, отношения сотрудничества и дружбы, связь может быть транспортной или описывать взаимное влияние и подчиненность. Вершины могут быть отдельными людьми, организациями, странами или веб-страницами. Это приводит к так называемой коммуникационной сетевой игре, заданной тройкой состоящей из конечного множества игроков характеристической функции и графа.

Литература:

1. ROGER B. MYERSON. GRAPHS AND COOPERATION IN GAMES. MATHEMATICS OF OPERATIONS RESEARCH Vol. 2. No. 3, August 1977.

2. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.

References:

1. ROGER B. MYERSON. GRAPHS AND COOPERATION IN GAMES. MATHEMATICS OF OPERATIONS RESEARCH Vol. 2. No. 3, August 1977.

2. Petrosyan L. A., Zenkevich N. A. Shevkoplyas E. V. Game Theory. SPb.: BHV-Petersburg, 201

Abstract. *In this article, we look at various principles of optimality of distribution of a prize between players in problems of the theory of cooperative games. The Shepley vector and the Myers vector, which is closely related to the previous one, but is defined for a slightly different class of games.*
Keywords: *game theory, cooperative games, optimality, the Shapley value, the Myerson value*

Article Submitted: 23.01.2019 г.